Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

2 de Maio de 2005

Semana 8

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$\text{(a) } y' = \frac{t\,y}{1+t^2}\,, \qquad \text{(b) } y' = (2-y)\,(y-1),$$

$$\text{(c) } y' = y\,(1-y^2)\,, \quad \text{(d) } y' = \frac{y+t}{y-t}\,,$$

2. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\,\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

3. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

4. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1-y^2 \\ y(1/2) = 2\,, \end{cases}$$

(i) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.

(ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

5. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geqslant \frac{1}{3\left(u(t)\right)^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \ ,$$

e integre esta relação entre 0 e t.